



Доказательства: Математика на миллион долларов

Ф.И.О:

КЛАСС:

ДАТА:



Базовый уровень

1) Как мы называем в математике утверждения, которые неизвестно, являются верными или ложными?

2) Как мы называем процесс установления истинности утверждения?

3) Запишите отрицание следующих заявлений:

a) $23 \geq 34$

b) $3x + 5x = 6x$

4) Если $6x - 8 = 2x$, то докажите, что $x = 2$.

5) Прочитайте следующее доказательство. Если здесь имеется ошибка, укажите номер строки и объясните, в чем ошибка.

Дано $x \in \mathbb{Z}$ и $x^2 + 2x = 2x + 25$, докажите что $x = 5$.

$$x^2 = 25$$

$$x = 5$$

Если данные утверждения верны, то $x = 5$.



Доказательства: Математика на миллион долларов

Ф.И.О:

КЛАСС:

ДАТА:



Средний уровень

1) Докажите от противного, что $\sqrt{2}$ не является рациональным.

2) Докажите по индукции, что $n^3 + 2n$ делится на 3, $n \geq 1$, $n \in \mathbb{N}$.

3) Докажите, что $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$.



Доказательства: Математика на миллион долларов

Ф.И.О:

КЛАСС:

ДАТА:



Углубленный уровень

1) A : n^2 четно.

B : n четно ($n \in \mathbb{Z}$).

Докажите, что $A \Rightarrow B$ от противного.

2) Докажите от противного, что $\sqrt{7}$ иррационально.



Доказательства: Математика на миллион долларов

ОТВЕТЫ

Базовый уровень

- 1) Предположения или гипотезы
- 2) Доказательство
- 3) а) $2^3 < 3^4$ б) $3x + 5x \neq 6x$ ($x \neq 0$) Т
- 4) $4x = 8$, однако $x = 2$; таким образом доказано.
- 5) Неверно, потому что $x = +5$.

Средний уровень

- 1) Допустим что $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$.
 $\exists a, b \in \mathbb{Z}$
 $a = b\sqrt{2}$
 $a^2 = 2b^2$
 a^2 чётно.
 a чётно, так как имеет делитель 2.
Положим $a = 2k$, где $k \in \mathbb{Z}$.
Кроме того, $4k^2 = 2b^2$ (так как, $a^2 = 2b^2$).
 $b^2 = 2k^2$
 b^2 чётно.
 b чётно, так как, b имеет делитель 2.
И a и b чётны.
 $\Rightarrow a$ и b имеют общий делитель 2.
Мы пришли к противоречию, поэтому $\sqrt{2}$ не является рациональным.
- 2) а) Утверждение верно для самой низкой требуемой величины n , а именно
 $n = 1$: $13 + 2 \times 1 = 3$, делящийся на 3.
б) Предположим, что это верно для некоторых значений $n = k$. Однако, $k^3 + 2k = 3m$, для некоторых $m \in \mathbb{N}$.
Рассмотрим $n = k + 1$:
 $(k + 1)^3 + 2(k + 1) = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 + 2k + 2$
 $= k^3 + 2k + 3k^2 + 3k + 3$
 $= (k^3 + 2k) + 3(k^2 + k + 1)$
 $= 3m + 3(k^2 + k + 1)$
 $= 3(m + k^2 + k + 1)$
 $= 3m_1$, для некоторых $m_1 \in \mathbb{N}$
 $\Rightarrow$ утверждение верно для $k + 1$.
- с) Поскольку утверждение верно для $n = 1$, а затем (верно для $n = k$) $\Rightarrow$ (верно для $n = k + 1$) затем, по индукции, верно $\forall n \geq 1, n \in \mathbb{N}$.
- 3) $\sin 2x = \sin(x + x)$
 $= \sin x \cos x + \cos x \sin x = 2 \sin x \cos x$



Доказательства: Математика на миллион долларов

ОТВЕТЫ

Углубленный уровень

1) Предположим, что А верно, но В неверно. Затем, n нечетно, а $n = 2m + 1$, где $m \in \mathbb{Z}$.

Но, $(2m + 1)^2 = 4m^2 + 4m + 1$

$$= 2(2m^2 + 2m) + 1$$

$$= 2r + 1, \text{ где } r \in \mathbb{Z}$$

Это показывает, что $(2m + 1)^2 = n^2$ нечетное, что противоречит утверждению А. Таким образом, n должно быть четным.

2) Предположим, $\sqrt{7}$ рационально.

Тогда $\sqrt{7} = \frac{m}{n}$ для целых чисел m и n , которые не имеют общих множителей, потому что мы

можем отменить вначале любые общие делители, [наибольший общий делитель $(m, n) = 1$].

$$\sqrt{7} = \frac{m}{n}$$

$$7 = \frac{m^2}{n^2}$$

$$7n^2 = m^2$$

$7|m$ по основной теореме арифметики

$$7^2|m^2$$

$$7^2|7n^2$$

$$7|n^2$$

$7|n$ по основной теореме арифметики

$7|m$ и $7|n$ т.е. m и n имеют общий множитель

Это противоречит $(m, n) = 1$.

Это в свою очередь противоречит первоначальному предположению, что $\sqrt{7}$ рационально, а, следовательно, $\sqrt{7}$ иррационально.